Lemma (Margulis): G Lie $\exists\, U(e)$ t.c. $\forall\, \Gamma < G$ discreto generato da elementi di U è nilpotente.

Lemma di Margulis: $\exists\, \varepsilon_n > 0$ $\forall n \geq 2$ COSTANTE DI MARGULIS

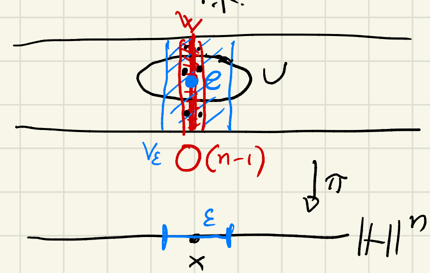
$\forall x \in \mathbb{H}^n$, $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreto generato da isometrie φ t.c. $d(x, \varphi(x)) < \varepsilon_n \Rightarrow \Gamma$ è virtualmente nilpotente

Def: G gruppo è VIRTUALMENTE P se $\exists\, H < G$ i.f. che è P

dim:

$$\begin{array}{ccc} G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) & \ni & \psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^n & & \psi(x) \end{array}$$

fibrazione



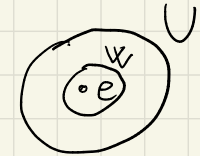
$$V_\varepsilon = \{\varphi \in \mathrm{Isom} \mid d(x, \varphi(x)) < \varepsilon\}$$

$$gU = \{gh \mid h \in U\}$$

$\exists\, m$ t.c. m traslati di U coprono V_ε

$V_\varepsilon \supseteq W$ intorno di $O(n-1)$ t.c. $W^m \subseteq V_\varepsilon$ $\quad W^m = \{g_1 \cdots g_m \mid g_i \in W\}$

$W = W^{-1}$ $\qquad$ $W \cap W^{-1}$



$\mathcal{E}_n$

$W^m \subseteq U \quad W = W^{-1}$

$V_{\varepsilon'} \subseteq W$

W funziona: Se $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ generato da elementi di W allora $\Gamma_U < \Gamma$ generato da $\Gamma \cap U$ ha indice $< m$ $\quad$ nilpotente di indice m $\quad \square$

Def: $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ non banale discreto ELEMENTARE se fissa un $S \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ finito (non puntualmente nec.)

Oss: Se Γ agisce in modo libero, Γ elementare $\Leftrightarrow$

1) $\Gamma = \langle \gamma \rangle \quad \gamma$ ip.

2) Γ gruppo di par. che fissano $p \in \partial \mathbb{H}^n$

dim: Γ elementare $\quad \varphi \in \Gamma$ ip. par. $\Rightarrow$ unico S inv. per φ è $\mathrm{Fix}(\varphi)$

Prop: $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreto e agisce liberamente

1) Se $\Gamma \underset{i.f.}{\leq} \Gamma'$ $\quad \Gamma$ el. $\Rightarrow \Gamma'$ el.

2) Se Γ virt. nilp., allora Γ banale o elementare

3) Dato $x \in \mathbb{H}^n$ $\quad \Gamma_{\varepsilon_n}(x) = \langle \{ \varphi \in \Gamma : d(x, \varphi(x)) < \varepsilon_n \} \rangle < \Gamma$ banale o elementare

dim: 1) $\forall \varphi \in \Gamma' \, \exists k$ t.c. $\varphi^k \in \Gamma = \{\text{par. che fissano } p\} \vee \{\text{ip. che fiss. } \ell\}$

φ

$\Rightarrow \Gamma' =$ " " " " "

2) Γ virt nilp. $\Rightarrow \Gamma' \underset{i.f.}{\leq} \Gamma$ nilp. $\overset{?}{\Rightarrow} \Gamma'$ el. o ban. $\Rightarrow \Gamma$ el. o ban.

Γ' nilp $\Rightarrow \Gamma'$ el. o banale

$\Downarrow$

$Z(\Gamma') \neq \{e\}$ $\quad \varphi \in Z(\Gamma')$ non banale

Elem.

$\Uparrow$

ogni $\psi \in \Gamma'$ commuta con $\varphi \Rightarrow \mathrm{Fix}(\psi) = \mathrm{Fix}(\varphi)$

3) Margulis $\Rightarrow$ $\Gamma_{\varepsilon_n}(x) < \Gamma$ è virt. nilp $\overset{2)}{\Rightarrow}$ elementare

THICK-THIN DECOMPOSITION

$M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ iperbolica completa $\qquad \varepsilon_n$ Margulis

$$M_{[\varepsilon_n, \infty)} = M^{thick} = \left\{ x \in M \ : \ inj_x M \geq \frac{\varepsilon_n}{2} \right\}$$

PARTE SPESSA

$$M_{(0, \varepsilon_n]} = M^{thin} = M \setminus M^{thick}$$

$$M^{thin} \subseteq \left\{ x \in M \ : \ inj_x M \leq \frac{\varepsilon_n}{2} \right\}$$

PARTE SOTTILE

Def: $p \in \partial \mathbb{H}^n$. $U \subseteq \mathbb{H}^n$ è STELLATO CON CENTRO p

Se ogni semiretta che punta verso p interseca U in una semiretta

Es: cuspidi troncate

$\ell \subseteq \mathbb{H}^n$. $U \supseteq \ell$ intorno

è STELLATO se ogni

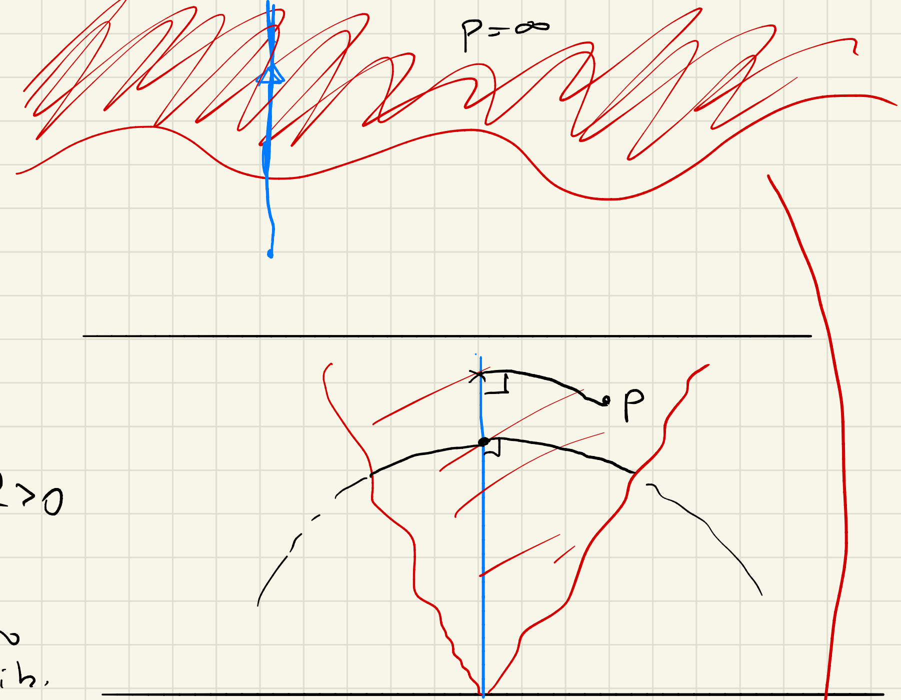
retta $r \perp \ell$ interseca U

in un connesso

Es: $N_R(\ell)$ R-intorno $R>0$

Def: Se $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreto
agisce lib.

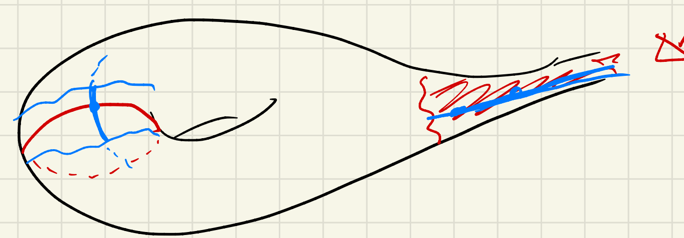
che fissa p e preserva U
stellato $\longrightarrow$ U/Γ intorno stellato di cuspide



Se $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ fissa ℓ

e preserva $U \supseteq \ell$ stellato

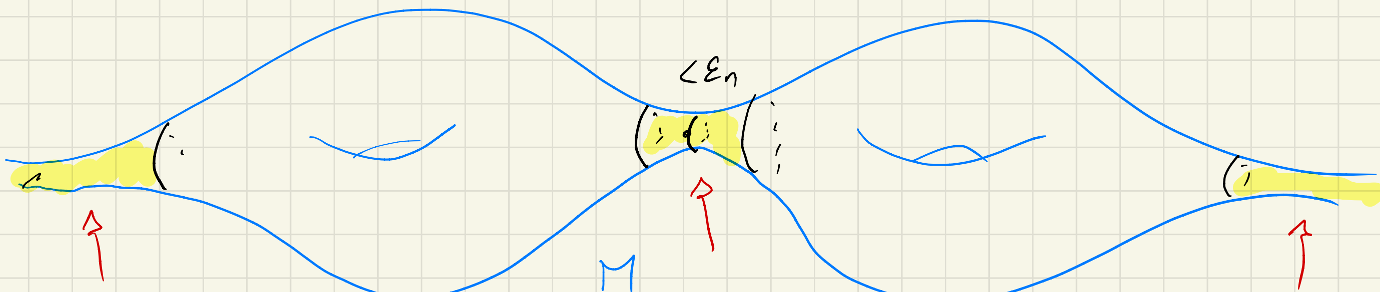
$\to$ U/Γ intorno stellato di
geod. chiusa



Es: cuspidi troncate e tubi troncati quozientati

Teo (Decomposizione thick-thin) $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ var. ip. completa

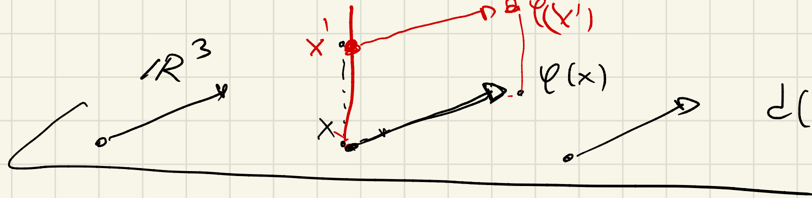
$M_{(0,\varepsilon_n)}$ = unione disgiunta di intorni stellati di cuspidi & di geod. semplici di lungh. $< \varepsilon_n$



dim: $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$

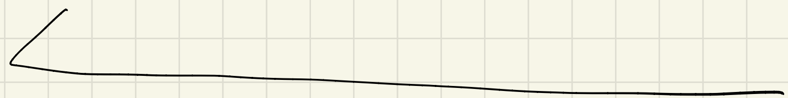
$\varphi \in \Gamma$ $\quad S_\varphi(\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, \varphi(x)) < \varepsilon \}$ è un intorno stellato di a) $Fix(\varphi)$ se è parabolica b) ℓ se è ip.

a)

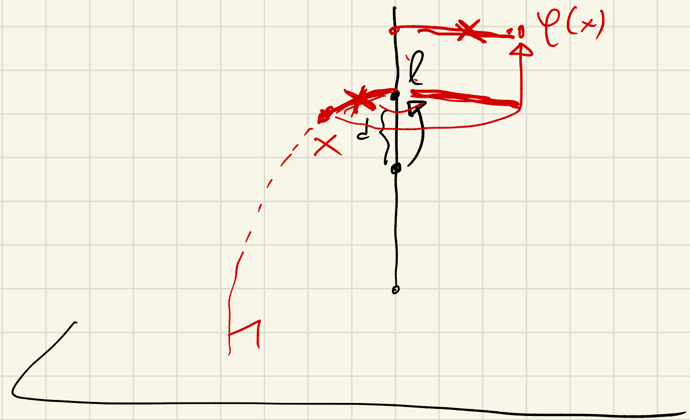


$p=\infty$

$$d(x,\varphi(x)) = d < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$d(x',\varphi'(x)) < d < \varepsilon$$



b)



se $d > \varepsilon$ $\quad S_\varphi(\varepsilon) = \emptyset$

~~no~~ se $d = \varepsilon$ $\quad S_\varphi(\varepsilon) = \ell$

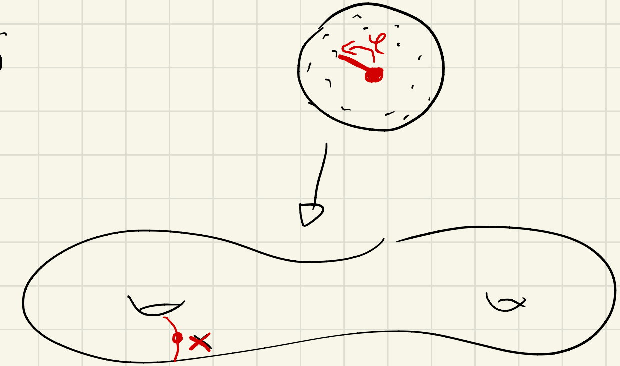
se $d < \varepsilon$ $\quad S_\varphi(\varepsilon) \supseteq \ell$

$\pi : \mathbb{H}^n \to M$

$$M = \mathbb{H}^n / \Gamma \qquad \varphi \in \Gamma \qquad S_\varphi(\varepsilon)$$

$$M^{thin} = M_{(0,\varepsilon_n]} = \pi(S) \qquad S = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} S_\varphi(\varepsilon_n) \qquad \varphi \neq id$$

Tesi: Le c.c. di S sono intorni stellati di $p \in \partial\mathbb{H}^n$ oppure $\ell \subseteq \mathbb{H}^n$

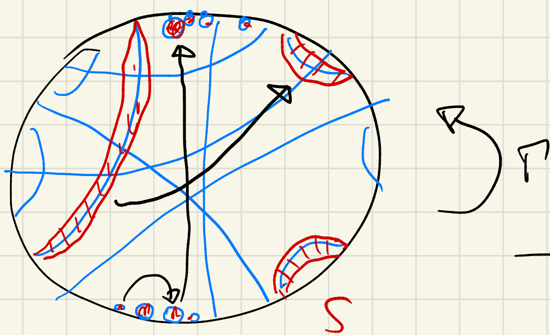


$$x \in S_{\varphi}(\varepsilon_n) \cap S_{\psi}(\varepsilon_n)$$

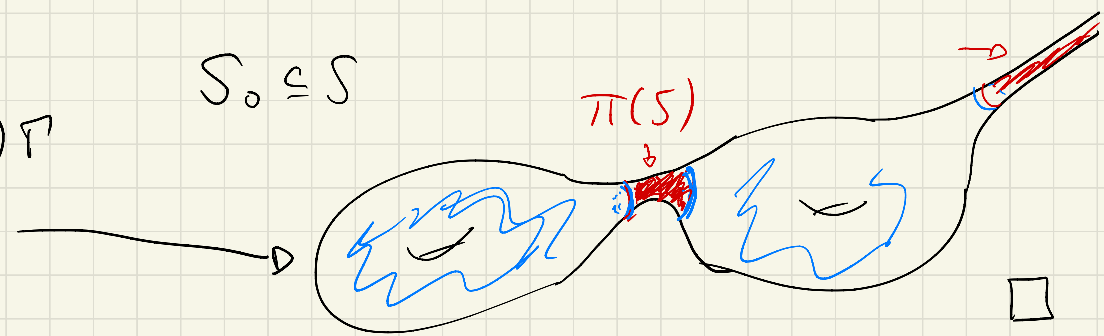
$$\Rightarrow \varphi, \psi \in \underbrace{\Gamma_{\varepsilon_n}(x)}_{\text{elementare}} < \Gamma$$

$\Rightarrow$ c.c. di S sono ciascun $\bigcup_{\varphi \in \Gamma'} S_{\varphi}$ $\quad \Gamma'$ el. $< \Gamma$

unioni di stellati con centro in comune è stellato



$S_0 \subseteq S$



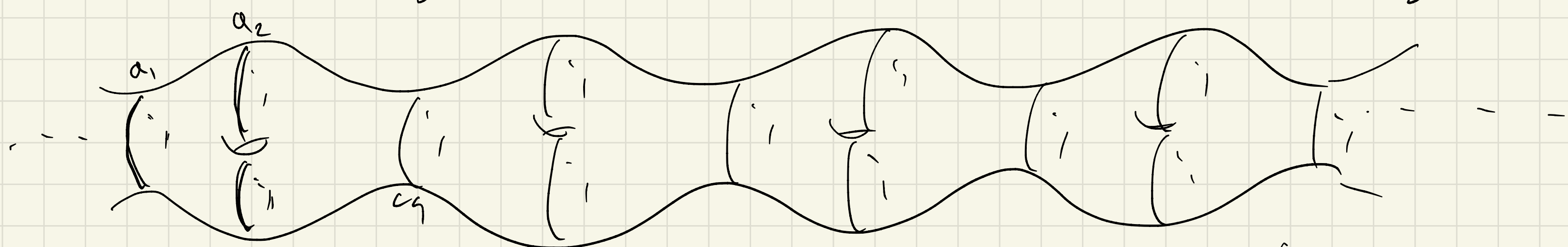
$\square$

Prop: Se M^n ip. orientabile completa $n \leq 3$ M^{thin} = cuspidi troncate $\cup$ tubi troncati

dim: $S_\varphi(\varepsilon)$ = ocopalle oppure $N_R(\ell)$

Cor: M^n ip. compl. Ogni γ geod. chiusa $\ell(\gamma) < \varepsilon_n$ è semplice

Le geod. chiuse in M con $L < \varepsilon_n$ sono semplici e disgiunte



$\overset{\shortparallel}{\mathbb{H}^2/\Gamma}$

π_1 non è f.g.

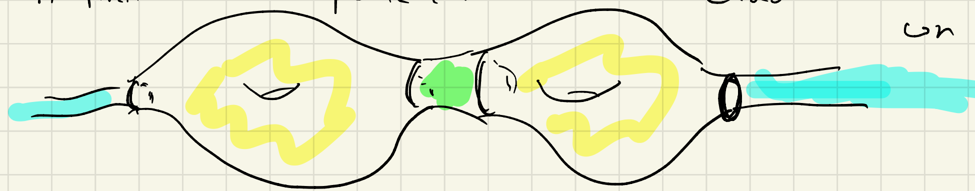
VOLUME FINITO

Prop: M^n ip. compl. $\mathrm{Vol}(M) < +\infty \iff M^{thick}$ è cpt.

$\boxed{\Leftarrow}$ M^{thick} cpt $\Rightarrow$ ha # finito di componenti di bordo

$\Rightarrow M^{thin}$ ha # finito di componenti

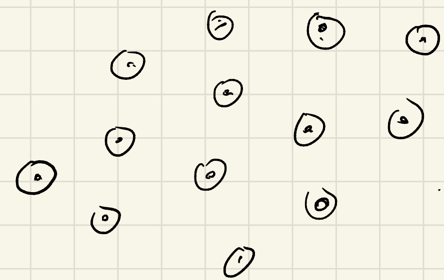
ciascuna contribuisce con $Vol < +\infty$



ciascuna componente di ∂M^{thick} è cpt

$\boxed{\Rightarrow}$ $vol(M) < +\infty \Rightarrow M^{thick}$ cpt

Se M^{thick} non cpt.



$inj > \frac{\varepsilon}{2}$

$\square$

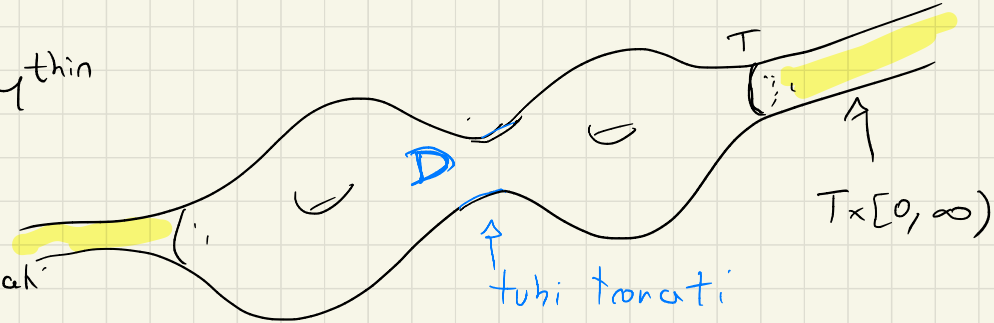
<u>Cor</u>: M ip. completa $vol(M) < +\infty$

$M \cong int(N)$ N cpt con bordo

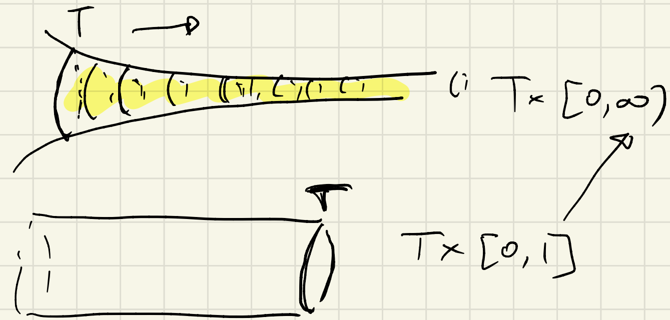
Ogni componente di ∂N è <u>una varietà piatta</u>

$M = M^{thick} \cup M^{thin}$

$D = M^{thick} \cup$ tubi troncati



Se $n=3$:



$$vol(M^3) < +\infty \Rightarrow M \cong int(N^3)$$

$$\partial N = \sqcup \text{ tori } \sqcup \text{ Klein}$$

Cor: $Vol(M) < +\infty$ (ip. compl.) $\Rightarrow \pi_1(M)$ ha presentaz. finita

$$M \cong int(N)$$

$$\pi_1(M) = \pi_1(N)$$